ANALISI

DELL' ERRORE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Rappresentazione dei numeri

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$

$a_i \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i \leq \beta - 1$

$i = 1 \dots n$

$b \in \mathbb{Z}$

$$x = \text{sign}(x) \cdot \beta^b \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^{-i}$$

RAPPRESENTAZIONE IN BASE β DI UN NUMERO REALE X

β è la BASE

b è l'ESPONENTE

a_i sono le CIFRE

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^{-i}$ è la MANTISSA

$x = 1.23$

0.123×10^1

0.0123×10^2

0.00123×10^3 ← $a_1 \neq 0$

TH. di rappresentazione

Data una base intera $\beta > 1$ e un qualunque numero reale x diverso da zero, esiste un'unica rappresentazione in base β tale che:

- $a_1 \neq 0$
- $\nexists K \in \mathbb{N}$ t.c. $a_i = \beta - 1 \ \forall i > K$

↓

Non si vuole che il numero sia periodico di periodo $\beta - 1$

La rappresentazione definita da questo teorema è detta **RAPPRESENTAZIONE IN VIRGOLA MOBILE NORMALIZZATA** del numero reale x.

$1.\overline{79} \rightarrow \frac{179 - 12}{90} = \frac{117}{90} = \frac{13}{10} = 1.3$

Altra rappresentazione di $1.\overline{79}$

Data la mantissa, è immediato verificare che

$$\frac{1}{\beta} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta^{-i} < 1$$

Sappiamo che $\alpha_1 \neq 0$. Dunque poniamo tutti gli altri α_i a 0. Otteniamo

$\alpha_1 \beta^{-1}$

Dove od α_1 il valore più piccolo possibile, cioè 1:

$$\beta^{-1} = \frac{1}{\beta}$$

La mantissa non ha un max, ma un estremo superiore. Poniamo $\alpha_i = (\beta - 1) \ \forall i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta^{-i} < \sum_{i=1}^{\infty} (\beta-1)\beta^{-i} = (\beta-1)\sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-i} =$$

$$= (\beta-1)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right) = 1$$

All'interno di un calcolatore si possono rappresentare solo un certo numero m di cifre della mantissa di x.

La rappresentazione sul calcolatore perciò corrisponde al numero $y = tr(x)$ oppure a $y = rd(x)$, dove:

$$tr(x) = sign(x) \cdot \beta^b \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta^{-i}$$

RAPPRESENTAZIONE PER TRONCAMENTO

RAPPRESENTAZIONE PER ARROTONDAMENTO PER ECCESSO

(Vera solo se β è un numero pari)

$$rd(x) = \begin{cases} tr(x) & \text{se } \alpha_{m+1} < \beta/2 \\ sign(x) \cdot \beta^b \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta^{-i} + \beta^{-m} & \text{se } \alpha_{m+1} \geq \beta/2 \end{cases}$$

Se arrotondiamo 0.9997 a 3 cifre decimali, otteniamo 1.

$$0.9997 \times 10^0 = 0.1 \times 10^1$$

$0.135 (\cdot \beta^b)$ (mantissa), $m = 2$

$0.14 + \beta^{-m}$ aggiunge 1

Si indichi con M l'insieme dei numeri rappresentabili all'interno di un calcolatore, i cosiddetti NUMERI DI MACCHINA.

M è un insieme finito; infatti, fissati β e m e supposto $L \leq b \leq U$ (Anche l'esponente deve essere limitato) $(L, U \in \mathbb{Z})$, la cardinalità di M risulta:

$$card(M) = 2(U - L + 1)(\beta - 1)\beta^{m-1} + 1$$

Quante sono le possibili mantisse che posso scrivere con m cifre?

$d_1 \neq 0$, allora $0 < d_1 \leq \beta - 1$. Dunque ho $\beta - 1$ possibili scelte per d_1

d_2, β possibili scelte

$\vdots$

Le possibili mantisse sono $(\beta-1)\cdot\underbrace{\beta\cdot\beta\cdot\ldots\cdot\beta}^{m-1} = (\beta-1)\cdot\beta^{m-1}$

Il numero delle mantisse va moltiplicato per il numero dei possibili esponenti: $(U-L+1)$

Ora dobbiamo moltiplicare tutto per i possibili segni: 2

Aggiungo infine lo zero: $+1$

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}(\beta, m, L, U)$$

L'insieme dei numeri di macchina è definito da questi valori

Arrotondando un numero coi metodi visti, si commette un errore.

Ci sono due tipi di errore:

- ERRORE ASSOLUTO

$$\delta x = tr(x) - x \longrightarrow |\delta x| \leq \beta^{b-m}$$

$$\delta x = rd(x) - x \longrightarrow |\delta x| < \frac{1}{2}\beta^{b-m}$$

- ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon_x = \frac{\delta x}{x}$$

Nel caso del TRONCAMENTO

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\delta x|}{|x|} < \frac{\beta^{b-m}}{\beta^{b-1}} = \beta^{1-m}$$

Nel caso dell'ARROTONDAMENTO

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\delta x|}{|x|} < \frac{\frac{1}{2}\beta^{b-m}}{\beta^{b-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

$$u = \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

PRECISIONE DI MACCHINA

In generale quando l'errore relativo di un'approssimazione non supera $\frac{1}{2}\beta^{1-k}$ si dice che l'approssimazione è corretta almeno fino alla k-esima cifra significativa